

**Uitwerking van het Tentamen Lineaire Analyse voor TN
van 16-8-2000, met extra toelichtingen.**

1. a. 1^e $(A(f+g))(x) = (f+g)(a-x) = f(a-x) + g(a-x) =$
 $(Af)(x) + (Ag)(x) = (Af+Ag)(x)$
 2^e $(A(\alpha f))(x) = (\alpha f)(a-x) = \alpha f(a-x) = \alpha(Af)(x) = (\alpha Af)(x).$

Dit geldt voor **alle** $x \in \mathbb{R}$ (dankzij de definities uit §1.1.4). Dus geldt $A(f+g) = Af + Ag$ en $A(\alpha f) = \alpha Af$, m.a.w. A is een lineaire afbeelding.

De werking van A is eenvoudig expliciet op te schrijven:

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} A(u + vx + wx^2) = u + v(a-x) + w(a-x)^2 = \\ u + va + wa^2 + (-v - 2aw)x + wx^2, \\ \text{waarbij we, zoals steeds, } x \mapsto u + vx + wx^2 \text{ afkorten door } u + vx + wx^2 \text{ enz.} \end{array} \right.$$

In het bijzonder geldt:

$A1 = 1$, dus $[A1]_S = [1, 0, 0]^T$ (kolomvector!)

$Ax = a - x$, dus $[Ax]_S = [a, -1, 0]^T$ en $Ax^2 = (a-x)^2 =$

$a^2 - 2ax + x^2 = a^2 \cdot 1 + (-2a)x + 1x^2$, dus $[Ax^2]_S = [a^2, -2a, 1]^T$.

Hieruit met de belangrijke §2.1.13 direct:

$$[A] = [A]_S = \begin{bmatrix} [A1]_S & [Ax]_S & [Ax^2]_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & -1 & -2a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

een (boven-)driehoeksmatrix, zodat we de eigenwaarden van de diagonaal kunnen aflezen: $\lambda_2 = -1$ en $\lambda_1 = \lambda_3 = 1$.

Alternatieve methode Uit (*), nu met het 2^e deel van §2.1.13.

Neem $f = u + vx + wx^2$ in $[A]_S[f]_S = [Af]_S$. Dan volgt uit (*):

$$[A] \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u + av + a^2w \\ -v - 2aw \\ w \end{bmatrix}, \text{ dus, opnieuw, } [A] = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & -1 & -2a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(nu rij na rij, i.p.v. kolom na kolom hierboven).

- b. Eigenwaarden: 1 met multipliciteit 2 en -1 (enkelvoudig).

$$E_1(\text{van}[A]) = \text{Kern } [A - 1 \cdot I_3] = \text{Kern} \begin{bmatrix} 0 & a & a^2 \\ 0 & -2 & -2a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{Kern} \begin{bmatrix} 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(2^e rij door -2 gedeeld en daarna a keer van de eerste afgetrokken enz.). De rang van de laatste matrix is 1. Dus: $\dim E_1 = 3 - 1 = 2$. Inderdaad vinden we door oplossen van het vereenvoudigde lineaire stelsel

$$\begin{cases} x_2 + ax_3 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \text{ direct}$$

(met $x_1 = \lambda, x_3 = \mu$) dat $E_1 = \{(\lambda, -a\mu, \mu) | \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} = \{\lambda(1, 0, 0) + \mu(0, -1, 1) | \dots\}$ zodat $E_1 = \langle (1, 0, 0), (0, -a, 1) \rangle$.

Net zo:

$$E_{-1} \text{ (van } [A]) = \text{Kern } [A - (-1)I_3] = \text{Kern } \begin{bmatrix} 2 & a & a^2 \\ 0 & 0 & -2a \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \text{Kern } \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{rang} = 2},$$

zodat $E_1 = \langle (-a, 2, 0) \rangle$ ($\dim = 3 - 2 = 1$, O.K.)

Voor de lineaire afbeelding A levert dit (na “terugvertalen”)

E_1 (van A) = $\langle 1, -ax + x^2 \rangle$ ($= \langle 1, x(a - x) \rangle = \langle 1, (x - \frac{a}{2})^2 \rangle$). Net zo, E_{-1} (van A) = $\langle -a + 2x \rangle$ ($= \langle x - \frac{a}{2} \rangle$). Deze resultaten zijn achteraf evident als we ons realiseren dat A de grafiek van een functie spiegelt in de verticale lijn met vergelijking $x = a/2$. Ook is A een spiegeling in de ruimte V (en zijn eigenwaarden behoren dus tot $\{1, -1\}$ omdat $A^2 = Id$. Immers $(A^2 f)(x) = (A(Af))(x) = (Af)(a - x) = f(a - y) = f(a - (a - x)) = f(x)$ met $y = a - x$).

- c. Volgens 1b (vergelijk §2.3.4) geldt nu $[A]P = PD$ (of $P^{-1}[A]P = D$) met, bijvoorbeeld,

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & -a & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ en } D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

waarbij de eigenwaarden, op de diagonaal van D , corresponderen (in diezelfde volgorde) met de eigenvectoren (kolommen) in P . Berekening van P^{-1} is overbodig, tenzij als controle.

- d. Neem, zoals gesteld, $u_1 = 1$ en $u_2 = x$. Dan, naar “Gram-Schmidt”,

$$v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}, \tilde{v}_2 = u_2 - \langle u_2 | v_1 \rangle v_1 \perp v_1 \text{ en tenslotte}$$

$$v_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|}. \text{ Hier: } \|u_1\|^2 = \langle u_1 | u_1 \rangle = \int_0^1 1^2 x dx = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Dus } v_1 = \sqrt{2} \text{ en vervolgens } \tilde{v}_2 = x - \int_0^1 x\sqrt{2} x dx \sqrt{2} = x - \frac{2}{3}$$

en

$$v_2 = \frac{x - \frac{2}{3}}{\sqrt{\int_0^1 (x - \frac{2}{3})^2 x dx}} = 6(x - \frac{2}{3}) = 6x - 4.$$

De gevraagde orthonormale basis T van $V = \langle 1, x \rangle$ is gegeven door $T = \{v_1, v_2\} = \{\sqrt{2}, 6x - 4\}$.

- e. **1^e methode** Met hoofdstelling 4.2.7 (of 4.3.4). Stel A (beperkt tot V) is zelfgeadjungeerd, dan is er een orthonormale basis van V bestaande uit eigenvectoren van A (bij uitsluitend reële eigenwaarden geldt het omgekeerde ook). Noodzakelijk (en voldoende) is hier (dus) dat $1(\in E_1 \cap V)$ en $2x - a(\in E_{-1} \cap V)$ loodrecht zijn. D.w.z.:

$\langle 1 | 2x - a \rangle = 0$, of $\int_0^1 (2x - a)x dx = 0$, of $\frac{2}{3} - \frac{a}{2} = 0$, of $a = 4/3$, in overeenstemming met het resultaat van 1d., namelijk:

$$v_2 = 6x - 4 = 3(2x - a) \text{ met } a = 4/3.$$

2^e methode Met behulp van matrices en gevolg 4.1.6.

Daar $A(v_1) = A(\sqrt{2}) = \sqrt{2} = v_1$ en $A(v_2) = A(6x - 4) = 6(a - x) - 4 = -(6x - 4) + 6a - 8 = -v_2 + (3\sqrt{2}a - 4\sqrt{2})v_1$ geldt

$$[A]_T = \begin{bmatrix} 1 & 3a\sqrt{2} - 4\sqrt{2} \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ met T orthonormaal.}$$

Dus is het noodzakelijk en voldoende dat $[A]_T$ symmetrisch is. Conclusie: $3a\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = 0$, of $a = 4/3$, als tevoren.

3^e methode Met de definitie (4.1.4 en 4.1.1).

Stel $\langle Af | g \rangle = \langle f | Ag \rangle$ voor willekeurige $f = \alpha + \beta x$ en $g = \gamma + \delta x$ uit V en los de resulterende vergelijking:

$$\int_0^1 (\alpha + \beta(a - x))(\gamma + \delta x) x dx = \int_0^1 (\alpha + \beta x)(\gamma + \delta(a - x)) x dx$$

op. Na wat rekenwerk krijgen we: $(\beta\gamma - \alpha\delta)\frac{a}{2} = (\beta\gamma - \alpha\delta)\frac{2}{3}$, ofwel $a = \frac{4}{3}$. We nemen kennelijk

$$\beta\gamma - \alpha\delta = \begin{vmatrix} \gamma & \alpha \\ \delta & \beta \end{vmatrix} \neq 0,$$

hetgeen correspondeert met de lineaire onafhankelijkheid van onze functies f en g .
Opmerking: Als $g = \lambda f$, dan geldt voor **elke** A dat $\langle Af | g \rangle = \lambda \langle Af | f \rangle = \lambda \langle f | Af \rangle = \langle f | \lambda Af \rangle = \langle f | Ag \rangle$ in het geval we met **reële** inproductruimtes van doen hebben!

2. a. (§ 4.2.2) Daar A unitair is ($AA^* = A^*A = Id$) behoudt hij (§ 4.1.10) het inproduct: $\langle Ax | Ay \rangle = \langle x | y \rangle$ voor alle x, y . Neem nu $x = y = v$, een eigenvector van A bij de eigenwaarde λ . Dan $\langle v | v \rangle = \langle Av | Av \rangle = \langle \lambda v | \lambda v \rangle = \lambda \bar{\lambda} \langle v | v \rangle = |\lambda|^2 \langle v | v \rangle$

en $\langle v|v \rangle = \|v\|^2 > 0$. Dus $|\lambda|^2 = 1$ en daar $|\lambda| \geq 0$, ook $|\lambda| = 1$. Net zo $|\mu| = 1$. In het bijzonder $\bar{\mu} = 1/\mu$.

b. Neem nu voor x een element van $E_\lambda (Ax = \lambda x)$ en $y \in E_\mu$. Dan $\langle v|w \rangle = \langle Av|Aw \rangle = \langle \lambda v|\mu w \rangle = \lambda\bar{\mu} \langle v|w \rangle = (\lambda/\mu) \langle v|w \rangle$. Met $\lambda \neq \mu$ volgt $\langle v|w \rangle = 0$ of $E_\lambda \perp E_\mu$.

c. Zij $z \in \mathbb{C}$, dan geldt $(z(A+B))^* = \bar{z}(A^* + B^*)$. Immers $\langle z(A+B)x|y \rangle = z \langle Ax|y \rangle + z \langle Bx|y \rangle = z \langle x|A^*y \rangle + z \langle x|B^*y \rangle = \langle x|\bar{z}A^*y \rangle + \langle x|\bar{z}B^*y \rangle = \langle x|\bar{z}(A^* + B^*)(y) \rangle$. In het bijzonder met $-B = A^*$ en $z = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2}$. $Y^* = \frac{i}{2}(A^* - A^{**}) = \frac{i}{2}(A^* - A) = \frac{A-A^*}{2i} = Y$, ofwel Y is zelfgeadjungeerd (p. 116 of p. 56).

3. a. Eigenwaarden van A oplossen uit $\det(A - \lambda I_3) = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (2-\lambda) \underbrace{\{(3-\lambda)(1-\lambda) + 1\}}_{\lambda^2 - 4\lambda + 4} = -(\lambda - 2)^3 \end{aligned}$$

A heeft één eigenwaarde 2, met multipliciteit 3. Stel $M = A - \lambda I_3$ met $\lambda = 2$ en $N = J - 2I_3$ waarbij J een Jordan normaal vorm van A is. Dan zijn M en N te zien als matrices van één en dezelfde lineaire afbeelding (M t.a.v. de standaardbasis, N t.a.v. de handige Jordan basis). In het bijzonder hebben M^i en N^i dezelfde rang.

Introductie. (herhaling van het hoorcollege)

Er zijn nu, a priori (voor we gaan rekenen), 3 mogelijke types Jordan normaal vormen mogelijk afhankelijk van de dimensies van: $E_2(i) = \text{kern}(M^i) (i \geq 1)$.

$J = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ <p>3 J-blokjes van 1×1 $\dim \text{Kern } M^1 = \dim \text{Kern } N^1$ $=$ "al" 3, $E_2 = \mathbb{C}^3$</p> <p style="text-align: center;">Geval 1</p>	$J = \left[\begin{array}{c cc} 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array} \right] \text{ of } J = \left[\begin{array}{cc c} 2 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array} \right]$ <p>2 J-blokjes, één van 1×1, één van 2×2 $\dim \text{Kern } M^1 = \dim \text{Kern } N^1 = 2$ $\dim \text{Kern } M^2 = \dim \text{Kern } N^2 = 3$</p> <p style="text-align: center;">Geval 2</p>
$J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ <p>1 J-blokje van 3×3 $\dim \text{Kern } M^1 = \dim \text{Kern } N^1 = 1$ $\dim \text{Kern } M^2 = \dim \text{Kern } N^2 = 2$ $\dim \text{Kern } M^3 = \dim \text{Kern } N^3 = 3$</p> <p style="text-align: center;">Geval 3</p>	<p>Hoe zit het hier? We beginnen het rekenwerk: $E_2 = E_2(1) = \text{Kern } M =$</p> $\text{Kern} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$ $\text{Kern} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$ <p>$\langle (1, 0, -1), (0, 1, -1) \rangle$, 2-dimensionaal.</p> <p>We zitten dus in geval 2, i.p.v. 3. en $E_2(2) =$ heel \mathbb{C}^3, $E_2(2) = \text{Kern } M^2$.</p>

Neem nu $v_3 \in \text{Kern } M^2 \setminus \text{Kern } M^1$. Bijvoorbeeld $v_3 = (0, 0, 1)$ en definieer $v_2 = (A - 2I_3)v_3 \Rightarrow v_2 = (1, -1, 0)$ (3^e kolom van M , na transpositie). Uiteraard is $(A - 2I_3)v_2 = 0$ (want het J -blokje is maar 2×2 en niet 3×3). Kies voor v_1 een willekeurige vector uit E_2 , mits lineair onafhankelijk van v_2 . Bijvoorbeeld $v_1 = (1, 0, -1)$. Dan geldt voor de bij A horende lineaire afbeelding \tilde{A} dat

$$[\tilde{A}]_{\{v_1, v_2, v_3\}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{per definitie, nl. door de constructie van } \{v_1, v_2, v_3\}).$$

Anders gezegd, in termen van matrices, als $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, dan is

$$P^{-1}AP = J = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{een gewenste Jordan normaalvorm.}$$

P stelt een coördinatentransformatie voor $P[x]_T = [x]_S$, als $T = \{v_1, v_2, v_3\}$ en $S = \{e_1, e_2, e_3\}$, de standaardbasis.

- b. Zie §2.5.7. $J = P^{-1}AP$, dus $At = PJtP^{-1}$ en $\exp(At) = P \exp(Jt)P^{-1}$, waarbij $Jt = Bt + Ct$ met $BC = CB$ en daarmee $\exp(Jt) = \exp(Bt)\exp(Ct)$ met

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{en dus } \exp(Bt) = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

en $\exp(Ct) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C^n t^n}{n!} = I_3 + Ct$ (want C^2 is al de nulmatrix). Dus

$$\exp(Jt) = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \quad \text{en met } P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{easy})$$

$$\exp(At) = P \exp(Jt)P^{-1} = \dots = \begin{bmatrix} (t+1)e^{2t} & te^{2t} & te^{2t} \\ -te^{2t} & (1-t)e^{2t} & -te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix},$$

in overeenstemming met de blokvorm van A .

- 4 a. (§7.1.2. \Rightarrow §5.2.9) Definitie: $f \in H \Leftrightarrow \int_0^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty$.

Duidelijk is $f_0 \equiv 1 \notin H$, de integraal is triviaal ∞ . Dus zeker $f_s \notin H$ voor $s < 0$ want $|f_s(x)|^2 \geq |f_0(x)|^2 = 1$ voor $s \leq 0$. Anderzijds, voor $s > 0$,

$$\int_0^{\infty} |f_s(x)|^2 dx = \int_0^{\infty} e^{-2sx} dx = \frac{1}{2s} (\in \mathbb{R}), \quad \text{zodat } f_s \in H \text{ met } \|f_s\| = \frac{1}{\sqrt{2s}}.$$

- b. Netter, met inductie naar n :

Start $\langle f_s | x^0 \rangle = \int_0^{\infty} e^{-sx} dx = \frac{1}{s} = \frac{0!}{s^{0+1}}$. O.K.

Stap $\langle f_s | x^{n+1} \rangle = \int_0^{\infty} e^{-sx} x^{n+1} dx = \int_0^{\infty} \left[-\frac{e^{-sx}}{s} x^{n+1} \right] + \frac{n+1}{s} \int_0^{\infty} e^{-sx} x^n dx$
 = (volgens de inductiehypothese) $\frac{n+1}{s} \frac{n!}{s^{n+1}} = \frac{(n+1)!}{s^{n+2}}$. O.K.

- c,d. Opmerking $e_n(x) = \frac{e^{x/2}}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x})$ is het beroemde Laguerre-polynoom van de graad n uit opgave 7.1.

Fourierreeks van $f_{a/2}$: $f_{a/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f_{a/2} | e_n \rangle e_n$ met volgens 4.b:

$$\begin{aligned} \langle f_{a/2} | e_n \rangle &= \frac{(a-1)^n}{2^n n!} \int_0^{\infty} e^{-x(a+1)/2} x^n dx = \frac{(a-1)^n}{2^n n!} \langle f_{(a+1)/2} | x^n \rangle \\ &= \frac{2}{(a+1)} \left(\frac{a-1}{a+1} \right)^n \Rightarrow f_{a/2} = \frac{2}{a+1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a-1}{a+1} \right)^n e_n. \end{aligned}$$

Parseval §7.3.5) geeft nu:

$$\frac{1}{a} = \|f_{a/2}\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle f_{a/2} | e_n \rangle|^2 = \frac{4}{(a+1)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a-1}{a+1}\right)^{2n} \quad \text{etc.}$$

Controle. Voor $a > 0$ geldt $-1 < \frac{a-1}{a+1} < 1$ en de reeks is dus een meetkundige met reden < 1 , nl. $\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^2$. Dus:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a-1}{a+1}\right)^{2n} = \frac{1}{1 - \left(\frac{a-1}{a+1}\right)^2} = \frac{(a+1)^2}{4a}, \quad \text{zoals gewenst.}$$