

# Antwoorden van het tentamen Diskrete Wiskunde en Algebra

17 mei 2000

*Opgave 1* is eenvoudig te doen met behulp van de multinomiale genererende functie

$$(1 + z^2 + z^5)^7 = \sum_{p+q+r=7; p,q,r \in \{0,1,2,\dots\}} \frac{7!}{p!q!r!} 1^p (z^2)^q (z^5)^r$$

Er zijn maar twee gevallen die een bijdrage leveren aan de coëfficiënt van  $z^{12}$ , dat wil zeggen waarvoor geldt:

$$2q + 5r = 12.$$

Namelijk de gevallen

$$r = 2 \& q = 1 \Rightarrow p = 7 - 3 = 4 \quad r = 0 \& q = 6 \Rightarrow p = 7 - 6 = 1.$$

Hun respectievelijke bijdrage is:

$$\frac{7!}{4!1!2!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{2} = 105 \quad \frac{7!}{1!6!0!} = 7$$

Het antwoord is dus  $105 + 7 = 112$ .

*Opgave 2 a.* Per definitie is  $b_i$  gelijk aan het aantal termen  $a_i$  uit  $a$  rechts van  $i$  met "toch"  $a_j < i$ . Dus

$$b = 0, 0, 1, 3, 2, 4, 5, 4, 2$$

De reconstructie van  $a$  uit  $b$  kan bij voorbeeld van de achterzijde af:

$$b_9 = 2 \Rightarrow a = \circ \circ \circ \circ \circ \circ 9 \circ \circ$$

Vervolgens gebruiken we dat  $b_8 = 4$ , d.w.z. dat er precies 4 open plaatsen rechts van de 8 moeten overblijven (voor getallen kleiner dan 8).

$$b_8 = 4 \Rightarrow a = \circ \circ \circ 8 \circ \circ 9 \circ \circ$$

en dan

$$b_7 = 5 \Rightarrow a = \circ 7 \circ 8 \circ \circ 9 \circ \circ$$

Enzovoorts. Het voordeel van het van achteren af reconstrueren is dat er niet meer met de al bepaalde posities van 9, 8, 7 etc. geschoven hoeft te worden, terwijl, als we vanaf de voorkant werken, na het verwerken van de informatie in bij voorbeeld  $b_1, b_2, b_3$ , we slechts weten dat in  $a$  de 3 voor de 2 en de 1 voor de 3 komt, maar niet waar deze waarden uiteindelijk terecht komen.

*Opgave 2 b.* We onderstrepen de runs, de maximale aaneengesloten stijgende delen, van  $a$ : Het blijken er 5 te zijn:  $a = \underline{47} \underline{68} \underline{159} \underline{3} \underline{2}$ .

**Stelling:**

$$E(\#runs) = \frac{n+1}{2}$$

Hier, met  $n = 9$ , dus  $(9+1)/2 = 5$ , het aantal runs is dus gelijk aan (en niet groter dan) de verwachting.

$L_1 = 2$  (de lengte van  $\underline{47}$ , de eerste run van  $a$ , is 2) en dit is groter dan verwacht volgens een andere stelling. Met  $n = 9$  ingevuld:

**Stelling:**

$$E(L_1) = \sum_{m=1}^9 \frac{1}{m!} \leq (en \approx)e - 1 \approx 1,718 \dots \leq 2$$

*Opgave 3 a.* Uit de recursiestap leiden we achtereenvolgens af dat

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = 6 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n - 8 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n = 6x \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} - 8x^2 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n-2}$$

zodat na "herindexering"

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = 6 \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n - 8x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

ofwel:

$$f(x) - a_0 - a_1 x = 6x(f(x) - a_0) - 8x^2 f(x).$$

Hier, omdat  $a_0 = -1$  en  $a_1 = 0$ ,

$$f(x) + 1 = 6x(f(x) + 1) - 8x^2 f(x).$$

Dus, met breuksplitsen:

$$f(x) = \frac{6x - 1}{1 - 6x + 8x^2} = \frac{6x - 1}{(1 - 2x)(1 - 4x)} = \frac{A}{1 - 2x} + \frac{B}{1 - 4x}.$$

Vermenigvuldigen met de noemer levert twee lineaire vergelijkingen voor de onbekenden  $A$  and  $B$ : Uit  $6x - 1 = A(1 - 4x) + B(1 - 2x)$  volgt immers  $\{-1 = A + B, 6 = -4A - 2B\}$  met als oplossing  $A = -2, B = 1$ , zodat

$$f(x) = \frac{-2}{1 - 2x} + \frac{1}{1 - 4x}.$$

*Opgave 3 b.* Uit de laatste formule volgt, door twee keer ontwikkelen in een meetkundige reeks, dat

$$f(x) = -2 \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n + \sum_{n=0}^{\infty} (4x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (4^n - 2^{n+1})x^n$$

en dus dat  $a_n = 4^n - 2^{n+1} = 2^n(2^n - 2)$ , welke vorm je maar verkiest. Dan geldt:  $a_n 4^{-n} = 1 - 2^{1-n} \rightarrow 1 - 0 = 1$ , voor  $n \rightarrow \infty$ .

*Opgave 4.a (eerste deel).* Er zijn  $n^2$  vakjes, die onafhankelijk van elkaar gevuld kunnen worden met een van de  $|A| = n$  elementen van  $A$ .

*	$a_1$	$a_2$	$\dots$	$a_n$
$a_1$				
$a_2$				
.				
.				
.				
$a_n$				

Hieruit volgt, met de productregel (of opgave 1.8.(a)), dat het totale aantal mogelijke binaire operaties op  $A$  gelijk is aan

$$n^{n^2}.$$

*Tweede deel:* Bij een commutatieve operatie  $*$  [ $x * y = y * x$ ] is de tabel symmetrisch in de diagonaal en is de onderdriehoek al bepaald (door de bovendriehoek). Het aantal commutatieve operaties op  $A$  is dus  $n$  tot de macht het aantal vrij in te vullen vakjes. Dit aantal vakjes is precies gelijk aan het aantal herhalingscombinaties van 2 uit  $n$ , ofwel aan

$$\binom{n+2-1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Dit aantal is natuurlijk ook te krijgen als  $n$  (het aantal op de diagonaal, het geval  $i = j$ ) +  $(n^2 - n)/2$  (de helft van het aantal buiten de diagonaal, het geval  $i \neq j$ ). Een nog langere weg is via  $1 + 2 + \dots + n = n(n+1)/2$ . Antwoord, in alle gevallen dus,

$$n^{n(n+1)/2}.$$

*Opgave 4 b.* Er geldt:

$a_i$  is links-schrapbaar in  $A \iff$  de rij met label  $a_i$  in de tabel van  $A$  is een permutatie van de  $n$  elementen van  $A$ .

Met de productregel volgt nu (omdat er precies  $n$  onderling onafhankelijk in te vullen rijen zijn) als antwoord:

$$(n!)^n.$$

*Opgave 5,* een simpele variant op opgaven 4.6 en 4.10. uit het dictaat [ $e = 3$  en de inverse van  $x$  is  $6 - x$ , associativiteit en commutativiteit zijn eenvoudig na te gaan].

*Opgave 6 a.* We moeten geen wezenlijke stappen overslaan. Uit de associatieve wet volgt:

$$\begin{aligned} f(x)f(y) &= (axa^{-1})(aya^{-1}) = (ax)(a^{-1}a)(ya^{-1}) = (ax)e(ya^{-1}) = a(xy)a^{-1} \\ &= f(xy) \end{aligned}$$

*Opgave 6 b.* Met de tabel ( $a^{-1} = b$ ) vinden we als antwoord:

$x$	1	$a$	$b$	$p$	$q$	$r$
$x^{-1}$	1	$b$	$a$	$p$	$q$	$r$
$orde(x)$	1	3	3	2	2	2
$f(x)$	1	$a$	$b$	$r$	$p$	$q$

Voor een meetkundige interpretatie, bestudere men de 6 symmetrieën van een gelijkzijdige driehoek.

*Opgave 6 c.* Het Hasse- (of POSet-) diagram van de collectie van alle subgroepen van  $G (\cong S_3)$ , partieel geordend naar inclusie, ziet er als volgt uit: De hele groep  $G$  wordt bovenin geplaatst. Onderin komt de triviale groep  $\{1\}$  en op het tussenniveau de enige (en normale) subgroep  $K = \langle a \rangle = \langle b \rangle = \{1, a, b\}$  van de orde 3 (met 3 inderdaad een deler van de orde  $3! = 6$  van  $G$ ). Daarnaast, eveneens op het tussenniveau, de drie subgroepen van de orde 2, te weten  $\langle p \rangle = \{1, p\}$ ,  $\langle q \rangle = \{1, q\}$  en  $\langle r \rangle = \{1, r\}$ . Met behulp van (een gevolg van) de **Stelling van Lagrange** is snel in te zien dat er geen ander echte subgroepen zijn dan de cyclische (die al vermeld zijn). Bij voorbeeld als  $H$  een subgroep is die zowel  $p$  als  $q$  bevat dan heeft  $H$  al direct minstens  $2^2 = 4$  elementen, maar de enige deler  $\geq 4$  van 6 is 6 zelf. Met andere woorden, dan is  $H = G$ . Triviaal zijn  $G$  en  $\{1\}$  normaal; dat  $K$  het is, komt omdat zijn index in  $G$  gelijk is aan twee [opgave 4.28]. Natuurlijk kan ook direct ingezien worden dat, bij voorbeeld,  $Kp = G \setminus H = pK$ . Uit het antwoord van opgave 6 b. kunnen we aflezen, dat geen van de drie 2-cyclische subgroepen  $\langle p \rangle$ ,  $\langle q \rangle$  en  $\langle r \rangle$  normaal in  $G$  is.