Kenmerk: TW2000/T-DW/08/dh

Tentamen Discrete Wiskunde en Inleiding Algebra voor INF

Vrijdag 18 augustus 2000, 13.30 – 16.30 uur

vakcode 151055

Motiveer uw antwoorden, rekenmachines niet toegestaan

1. Gegeven: 9 verschillende bakjes, genummerd 1 t/m 9, en 5 identieke knikkers.

   a. Bepaal het aantal mogelijke verdelingen van de vijf knikkers over de bakjes.

   b. Als a., maar nu mag er hoogstens één knikker per bakje voorkomen.

   Stel nu dat ook de knikkers genummerd worden: k_1 t/m k_5.

   c. Wat wordt <u>nu</u> het antwoord op de vraag b?

   d. Bepaal het aantal mogelijke verdelingen, waarbij 2 knikkers in het laatste bakje zitten en steeds 1 knikker in elk van de eerste drie bakjes.

2. Gegeven zijn twee permutaties a en $\widetilde{a}$ van 1 t/m n, waarbij $\widetilde{a}$ de gespiegelde is van a. D.w.z., als $a = a_1\ a_2\ a_3\ \ldots\ a_{n-1}\ a_n$, dan $\widetilde{a} = a_n\ a_{n-1}\ \ldots\ a_3\ a_2\ a_1$.
   De permutatie a heeft k runs en inversietabel b en $\widetilde{a}$ heeft $\widetilde{k}$ runs en inversietabel $\widetilde{b}$.
   Bepaal het verband tussen k en $\widetilde{k}$ resp. b en $\widetilde{b}$; controleer uw uitkomsten voor a gelijk aan: 2 3 9 5 1 8 6 7 4.

3. Zij $f(x)$ de genererende functie van een rij $a_0, a_1, a_2, \ldots$.

   a. Geef de rijen gegenereerd door:

   $$f(5x), \quad \frac{f(x)}{1-x}, \quad f(x^2) \quad \text{resp.} \quad \int_0^x f(t)dt.$$

   b. Stel nu: $a_0 = 1$, $a_1 = 6$ en $na_n = 2a_{n-1}$ $(n \geq 2)$.
   Bewijs, met de methode van genererende functies, dat

   $$(*) \qquad f'(x) = 2f(x) + 4, \quad f(0) = 1.$$

   c. Bepaal α, β, γ zó dat $f(x) = \alpha e^{\beta x} + \gamma$ de oplossing is van het beginwaarde probleem (*) en leid <u>hieruit</u> de expliciete formule voor a_n af.

4. $S = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{bmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\}$; $*$ is het matrixproduct.

   a. Bewijs dat $(S, *)$ een semigroep is.

   b. Bepaal alle linker– resp. rechter-éénelementen van $(S, *)$.

   c. Welke elementen zijn links-schrapbaar resp. welke links-nulelement in $(S, *)$?

5. a. Bereken en teken de cyclische monoïde C door 3 binnen $(\mathbb{Z}_7, \cdot)$ voortgebracht.

   b. Bewijs dat C een groep is en geef, expliciet, alle vier de subgroepen van C.

   c. Bewijs dat $x \mapsto x^2$ een morfisme van C in C oplevert en bepaal expliciet zijn Kern en Beeld.

   d. Controleer, expliciet, de stelling van Lagrange, voor een niettriviale subgroep van C.

Normering:

1.a	:	1	2.	:	3	3.a	:	2	4.a	:	1	5.a	:	2
b	:	$\frac{1}{2}$				b	:	2	b	:	1	b	:	2
c	:	1				c	:	2	c	:	1	c	:	2
d	:	1										d	:	1

Totaal: $22\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} = 25$ punten