

Vak : **Discrete Wiskunde & Inleiding Algebra (INF)**
Vakcode : 151055
Datum : 20 augustus 1999
Tijdstip : 13.30 - 16.30 uur
Plaats : CC-1

**Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden.
Een rekenmachine mag niet gebruikt worden.**

- Bepaal het aantal verschillende worpen met vier identieke dobbelstenen, waarin minstens één 3 voorkomt.
 - Als onderdeel (a), maar nu met verschillende (wèl te onderscheiden) dobbelstenen.
 - Bereken de coëfficiënt van x^{24} in $(1 + x + x^3 + x^7)^6$.
- De getaxeerde executietijd van een recursieve procedure $r(n)$ om een permutatie a_1, a_2, a_3, \dots uit zijn inversietabel b_1, b_2, b_3, \dots te reconstrueren voldoet aan:
 $T(1) = c_1$ en $T(n) = c_1 + T(n-1) + c_2 b_n \quad (n \geq 2)$.

(a) Leid af dat $T(n) = c_1 n + c_2(b_1 + b_2 + \dots + b_n) \leq c_1 n + c_2 \binom{n}{2}$.

(b) Bewijs uit (a). dat

$$T(n) = \mathcal{O}(n^2) \quad (n \rightarrow \infty).$$

- Zij $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ de genererende functie van een rij a_0, a_1, a_2, \dots gegeven door $a_0 = 1, a_1 = 9$ en

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} \quad (n \geq 2).$$

(a) Bewijs: $g(x) = \frac{4x + 1}{6x^2 - 5x + 1}$.

(b) Bepaal, met breuksplitsen, de constanten A en $B (\neq 0)$ zó, dat

$$g(x) = \frac{A}{1 - 2x} + \frac{B}{1 - 3x}.$$

(c) Geef m.b.v. (b) een expliciete formule voor a_n en bewijs dat

$$a_n \sim B3^n \quad (n \rightarrow \infty).$$

Z.O.Z.

4. Stel $(S, *)$ is een monoïde met éénelement e en $a, b \in S$.
- (a) Bewijs: a is linksinverteerbaar in $S \Rightarrow a$ is linksschrapbaar in S .
 - (b) Bewijs: b is linksnulelement in $S \Rightarrow a * b$ is linksnulelement in S .
 - (c) Bewijs: a is linksschrapbaar in S en $|S| < \infty \Rightarrow a$ is rechtsinverteerbaar in S .
5. M is de door 2 binnen $(\mathbb{Z}_{104}, \cdot)$ voortgebrachte cyclische monoïde (zie tekening) met cykelgroep $C = \{2^3, 2^4, \dots, 2^{14}\}$.

- (a) Verifieer dat 40 de idempotent van C is (kan het ook snel?).
- (b) Geef snel de operatietabel van (C, \cdot) .
- (c) Maak het volgende schema af:

$x \in C$	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}	2^{11}	2^{12}	2^{13}	2^{14}
$x^{-1}, \text{ in } C$										2^{12}	2^{11}	2^{10}
orde(x), in C										1	12	6

- (d) Geef, expliciet, alle zes verschillende subgroepen van (C, \cdot) .
- (e) Bewijs dat $x \xrightarrow{f} x^2$ een morfisme is van C in C en bepaal expliciet zijn Kern (Ker f) en Beeld ($f(C)$).

Normering:

1	a : 2	2	a : 2	3	a : 3	4	a : 1,5	5	a : 1
	b : 1		b : 1		b : 1		b : 1		b : 1
	c : 2				c : 3		c : 1,5		c : 2
									d : 2
									e : 2

Totaal: 27 + 3 = 30 punten