

**Uitwerking van het Tentamen Discrete Wiskunde en  
Inleiding Algebra voor INF van 18-8-2000**

1. a. Uit de gegeven verzameling van 9 bakjes kiezen we 5 keer een bakje (die dan een knikker toegewezen krijgt). We kiezen met herhaling (meerdere knikkers in één bakje is toegestaan) en aangezien de knikkers niet te onderscheiden zijn (en we alleen in de resulterende verdeling geïnteresseerd zijn) kunnen we van een ongeordende keuze spreken. We hebben met herhalingscombinaties van 5 uit 9 te maken.

**Antwoord:**  $\binom{9+5-1}{5} = \binom{13}{5} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 13 \cdot 11 \cdot 9 = 1287$ .

- b. Idem, maar zonder herhaling. De combinaties van 5 uit 9.

**Antwoord:**  $\binom{9}{5} = \binom{9}{4} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 9 \cdot 7 \cdot 2 = 126$ .

- c. Als b., maar nu zijn de knikkers genummerd. De variaties van 5 uit 9. Voor de eerste knikker zijn 9 bakjes mogelijk, voor de tweede dan nog 8 (want één is al bezet), voor de derde nog maar 7, etc.

**Antwoord:**  $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 15120 (= 5! \binom{9}{5})$ . Merk op dat de 5 knikkers, op  $5!$  manieren gepermuteerd kunnen worden.

- d. De niet terzake doende lege bakjes (4 t/m 8) kunnen we weggelaten denken. Met multinomiaal coëfficiënten krijgen we als

**antwoord:**  $\frac{5!}{(1!)^3 2!} = \frac{120}{2} = 60$ .

(Dit is o.a. de coëfficiënt van  $b_1 b_2 b_3 b_5^2$  in  $(b_1 + b_2 + \dots + b_9)^5$ ).

Een eenvoudig alternatief: Er zijn  $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$  mogelijke verdelingen van 3 knikkers over bakje 1 t/m 3 (= # variaties van 3 uit 5). De inhoud van het laatste bakje ligt nu vast.

2. Zie Stelling 1.8.3. Merk op dat  $a_i > a_{i+1} \Leftrightarrow a_{i+1} < a_i \Leftrightarrow \tilde{a}_{n+1-i-1} < \tilde{a}_{n+1-i} \Leftrightarrow \tilde{a}_{n-i} < \tilde{a}_{n-i+1}$ . Dus  $k + \tilde{k} = n - 1 + 2 = n + 1$ , waarbij de 2 erbij komt omdat  $k$  en  $\tilde{k}$  beide nog een slotrun hebben.

Iets anders geformuleerd: De grafiek van de permutatie  $\tilde{a}$  is precies die van  $a$ , alléén van rechts naar links doorlopen. Dus voor elk van de  $n + 1$  "posities": vóór  $a_1$ , tussen  $a_1$  en  $a_2, \dots$ , tussen  $a_{n-1}$  en  $a_n$ , ná  $a_n$  geldt dat daar precies één run van  $a$  of  $\tilde{a}$  (hetzij van  $a$ , hetzij van  $\tilde{a}$ ) eindigt. Conclusie:  $k + \tilde{k} = n + 1$ .

Neem  $N = \{1, 2, \dots, n\}$ . Per definitie is  $b_j$  het aantal getallen uit  $N$  in  $a$  rechts van  $j$  en kleiner dan  $j$ . Het aantal getallen uit  $N$  in  $a$  kleiner dan  $j$  maar links van  $j$  is precies  $\tilde{b}_j$  (want  $\tilde{a}$  is de gespiegelde van  $a$ ). Conclusie:  $b_j + \tilde{b}_j = j - 1$ , het totale aantal getallen uit  $N$  kleiner dan  $j$ .

In het voorbeeld:  $a = \underline{239} \underline{5} \underline{18} \underline{67} \underline{4}$ ,  $\tilde{a} = \underline{47} \underline{68} \underline{159} \underline{3} \underline{2}$ ,  $k = \tilde{k} = 5$ ,  $k + \tilde{k} = 10 = 9 + 1 = n + 1$  en  $b = 011021136$ ,  $\tilde{b} = 001324542$  zodat, inderdaad,  $b + \tilde{b} = 012345678$ .

3. a.  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ . Zie Stelling 2.2.1.

$$f(5x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (5x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 5^n a_n x^n \Rightarrow \text{rij} = a_0, 5a_1, 25a_2, \dots$$

$\frac{f(x)}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$  met  $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$  (voorbeeld 2.2.3, een speciaal geval van de convolutiestelling 2.2.2)  $\Rightarrow$  rij  $a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \dots$

$f(x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n} \Rightarrow$  rij  $= a_0, 0, a_1, 0, a_2, \dots$

$\int_0^x f(t) dt = \int_0^x \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right\} dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} t^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} t^n \Rightarrow$  rij  $= 0, \frac{a_0}{1}, \frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{3}, \dots$

b.  $f(0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n 0^n = a_0 = 1$  (N.B.:  $0^n = 0$  voor  $n > 0$ , maar  $0^0 = 1$ ).

Uit de recurrente betrekking volgt (eventueel na delen door  $x$ ) dat

$$\sum_{n=2}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=2}^{\infty} 2 a_{n-1} x^{n-1}.$$

Het rechterlid  $= 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = 2(f(x) - a_0) = 2f(x) - 2$ .

Het linkerlid  $= \sum_{n=2}^{\infty} a_n \frac{d}{dx} x^n = \frac{d}{dx} \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = \frac{d}{dx}(f(x) - a_1 - a_2 x) = f'(x) - 6$  etc.

c. Invullen in  $f'(x) = 2f(x) + 4$  van  $f(x) = \alpha e^{\beta x} + \gamma$  geeft:

$\alpha \beta e^{\beta x} = 2\alpha e^{\beta x} + 2\gamma + 4$ , dus  $\beta = 2$  en  $\gamma = -2$ . Met  $1 = f(0) = \alpha + \gamma$  volgt dan  $\alpha = 3$ . Dus

$$f(x) = 3e^{2x} - 2 = 3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!} - 2 = 1 + 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n$$

Conclusie:  $a_0 = 1$  (al bekend) en  $a_n = 3 \frac{2^n}{n!}$  ( $n \geq 1$ ).

4. a.  $S$  is gesloten, het product van twee elementen van  $S$  ligt weer in  $S$ , want

$$(*) \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ bc & bd \end{bmatrix} \in S$$

( $\mathbb{R}$  is geloten voor  $\cdot$ ). Matrixvermenigvuldiging is, indien gedefinieerd, altijd associatief. Dus hier ook;  $S$  is niet alléén een binaire algebra, maar zelfs een semigroep.

b. Uit (\*) lezen we direct af dat  $S$  oneindig veel linkséénelementen heeft, nl. van de vorm  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix}$  ( $a \in \mathbb{R}$ ), en dus (Stelling 4.1.18) géén rechtséénelement. Er geldt wèl:

$$\forall A \in S \exists B \in S AB = A \quad (\text{op } A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ t & 0 \end{bmatrix}, t \neq 0, \text{ na}), \text{ maar dit is } \underline{\text{veel}} \text{ zwakker dan}$$

$$\exists B \in S \forall A \in S AB = A.$$

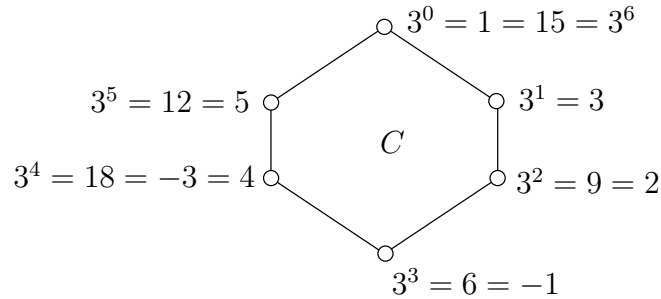
c.  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{bmatrix}$  is linksschrapbaar  $\Leftrightarrow b \neq 0$ .

Immers,  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ e & f \end{bmatrix}$  is equivalent met  $\begin{cases} bc = be \\ bd = bf \end{cases}$  en hier-

uit volgt steeds  $(c, d) = (e, f)$  d.e.s.d. als  $b \neq 0$ .

$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  is een 2-zijdig nulelement (triviaal), dus zijn er géén andere links- of rechts-nulelementen, volgens Stelling 4.1.15.

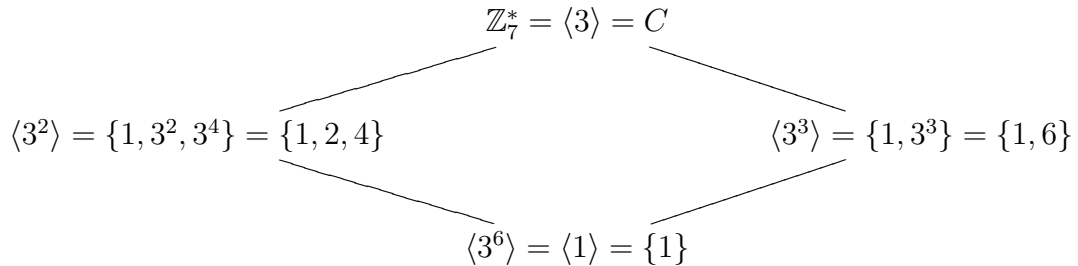
5a,b Daar  $3 \cdot 5 = 1$  in  $\mathbb{Z}_7$  is 3 inverteerbaar in  $(\mathbb{Z}_7, \cdot)$  (met inverse 5). Dus weten we van tevoren dat  $\langle 3 \rangle$  van het type  $C_{m,n}$  is met  $m = 0$ .



Uit Stelling 4.5.10 volgt direct dat  $C$  een groep is met éénelement 1. We kunnen ook een lijstje van inverses aangeven:

$x$	$3^0 = 1$	$3^1 = 3$	$3^2 = 2$	$3^3 = 6$	$3^4 = 5$	$3^5 = 5$
$x^{-1}$	$3^0 = 1$	$3^5 = 5$	$3^4 = 4$	$3^3 = 6$	$3^2 = 2$	$3^1 = 2$

We geven het Hasse-diagram van de vier subgroepen:



c. De commutativiteit van  $C = \mathbb{Z}_7^* = \mathbb{Z}_7 \setminus \{[0]_7\}$  is genoeg:

$$f(xy) = (xy)^2 = xyxy = xxyy = x^2y^2 = f(x)f(y).$$

Dus  $f$ , gegeven door  $f(s) = s^2$ , is een morfisme van de groep  $C$  in  $C$ .

d. Stelling van Lagrange = Stelling 4.6.10 (p. 51).

$$\begin{array}{ccc}
\begin{array}{|c|c|} \hline 4 & -4 = 3 \\ \hline 2 & -2 = 5 \\ \hline 1 & -1 (= 6) \\ \hline \end{array} & \xrightarrow{f} & \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 4 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \\
\text{Kern } f & & \\
= K & \Rightarrow & \\
= \langle -1 \rangle = \{1, -1\} & & \text{Beeldgroep } B = \langle 2 \rangle
\end{array}$$

De drie rijen corresponderen met de  $3 = \frac{6}{2} = \frac{|C|}{|K|}$  cosets van  $K$ .

$$1K = (-1)K = K = \{1, 6\}$$

$$2K = 5K = \{2, 5\}$$

$$4K = 3K = \{3, 4\}.$$

De kolommen corresponderen met de  $2 = \frac{6}{3} = \frac{|C|}{|B|}$  cosets van  $B$

$$1B = 2B = 4B = B = \{1, 2, 4\}$$

$$6B = 5B = 3B = \{6, 5, 3\}.$$

$K = \{x \in C \mid f(x) = 1\}$ , de algemene oplossingsverzameling van de homogene morfismevergelijking (homogeen omdat 1 het éénelement is t.a.v. de hier gebruikte operatie.) De twee ander cosets treden op als oplossingsverzamelingen van de bijbehorende inhomogene vergelijkingen:

$$4K = 2K = \{3, 4\} = \{x \in C \mid f(x) = 2\}$$

$$2K = 5K = \{2, 5\} = \{x \in C \mid f(x) = 4\}.$$

Ziet u de analogie met Lineaire Algebra?