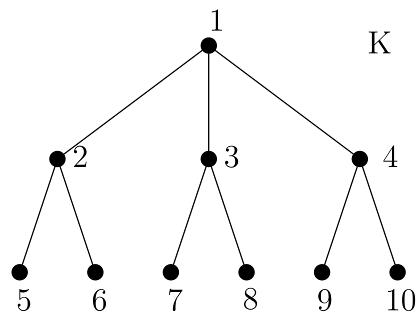
Kenmerk: TW2000/T-DW/10/dh

Tentamen Algebra voor TW

Donderdag 17 augustus 2000, 9.00 – 12.00 uur
vakcode 152063

1. Zij G de automorfismengroep van de graaf K hieronder



   a. Beargumenteer dat de baan $G5 = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ en zo ook $G2 = \{2, 3, 4\}$ en $G1 = \{1\}$.

   b. Bepaal, expliciet, in disjuncte cykelsplitsing, de stabilisator-subgroepen $G_5 (= S_I(5))$ en G_2.

   c. Citeer de baanstelling en bepaal daaruit $|G|$ m.b.v. deel a. en b.

2. Stel R is een commutatieve ring, $f : R \to R$ een ringmorfisme. Verder $N(R) := \{x \in R \mid x \text{ nilpotent }\} = \{x \in R \mid \exists_{n\in\mathbb{N}} x^n = 0\}$.

   a. Bewijs dat $S := \{x \in R \mid f(x) = x\}$ een deelring is van R.

   b. Geef de definitie van "ideaal" en bewijs daarmee dat $N(R)$ een ideaal van R is met $f(N(R)) \subseteq N(R)$.

3. Zij $\mathbb{F}_{49}$ het lichaam met $49 = 7^2$ elementen, met basis $\{1, \alpha\}$ over $\mathbb{Z}_7$, waarin α voldoet aan $\alpha^2 = 3$.

   a. Bewijs dat de orde van $\pm\alpha$ gelijk is aan 12.

   b. Controleer dat $X^2 - 3$, inderdaad, irreducibel is <u>over</u> $\mathbb{Z}_7$ en geef de ontbinding van $X^2 - 3$ <u>over</u> $\mathbb{F}_{49}$. Licht toe.

c. Stel $\beta = 1 + 2\alpha$. Bewijs dat $\beta^4 = -\alpha$ en daaruit (Lemma!) dat de orde van β gelijk is aan 48 ($= |\mathbb{F}_{49}^*|$).

d. Geef het "lattice" van alle subgroepen van $\mathbb{F}_{49}^*$ ($= \langle\beta\rangle$).

e. Bepaal de representatie van achtereenvolgens $1, \beta$ en β^2 t.a.v. $\{1, \alpha\}$ en daaruit de minimumveelterm van β.

4. C is een binaire $(5, 2)$-code met generator-matrix $G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

a. Bepaal een controlematrix H van C.

b. Construeer een (volledige) "cosetleider $\leftrightarrow$ syndroom-lijst" voor C.

c. Decodeer m.b.v. uw lijst de ontvangen woorden $\begin{cases} v_1 = 0\,0\,1\,0\,1 \\ \text{en} \\ v_2 = 1\,0\,0\,1\,0 \end{cases}$

1.a.	:	2	2.a.	:	2	3.a.	:	1	4.a.	:	2
b.	:	2	b.	:	4	b.	:	2	b.	:	2
c.	:	2				c.	:	2	c.	:	2
						d.	:	2			
						e.	:	2			

Totaal: 27+3 = 30 punten.