

[-] Kransproducten binnen de Symmetrische groep S_6

```
> restart: with(combinat): with(group): t:=[[1,2]]; m:=[[2,3,4,5,6]];
print(mulperms(t,m),mulperms(m,t));
```

Warning, the protected name Chi has been redefined and unprotected

```
t := [[1, 2]]
m := [[2, 3, 4, 5, 6]]
[[1, 3, 4, 5, 6, 2]], [[1, 2, 3, 4, 5, 6]]
```

Permutaties werken hier steeds van **rechts** op de permutanden, in dit geval op $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Bijvoorbeeld: $1(t*m) = (1t)m = 3$, hetgeen in de analyse [of elementaire tekstboeken] als $m(t(1)) = 3$ geschreven zou zijn. We spreken * dan ook uit als: "voor". Partities van een natuurlijk getal n , hier $n=6$, kunnen met behulp van het combinatoriek-pakket opgevraagd worden.

[-] Definitie en voorbeelden

```
> o:=permgroupe(6, {});
```

```
o := permgroupe(6, { })
```

De triviale groep o met als enig element de identieke permutatie van $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, alle 1-cykels worden door Maple weggelaten. We construeren nu eerst de S_6 met behulp van de twee klassieke voortbrengers t en m . [$m^{(-1)} t m = (1, 3)$, $m^{(-2)} t m^2 = (1, 4)$ etc.] Zoals bekend is de A_n , de subgroep van alle even permutaties, de enige *normale* subgroep van de S_n en dus noodzakelijk gelijk aan de afgeleide groep $[S_n, S_n]$, dit is de subgroep voortgebracht door alle (*even!*) commutatoren $[a, b] = a b a^{(-1)} b^{(-1)}$ uit de S_n . De bijbehorende factorgroep heeft orde 2 [voor $n > 1$]. Naast het triviale karakter (constant 1) laat de S_n dus precies één ander 1-dimensionaal karakter toe, het bekende signum-morfisme, met waarde 1 op A_n en -1 daarbuiten, in Maple met "parity" aan te roepen.

```
> S6:=permgroupe(6, {t,m}); evalb(o=center(S6)); A6:=derived(S6);
print(grouporder(S6)=ifactor(grouporder(S6)),grouporder(A6));
print(parity(t),parity(m),parity(A6),parity(S6));
```

```
S6 := permgroupe(6, {[[1, 2]], [[2, 3, 4, 5, 6]])}
```

```
true
```

```
A6 := permgroupe(6, {[ ], [[1, 2, 3]], [[1, 3, 4]], [[1, 4, 5]], [[1, 5, 6]])}
```

```
720 = (2)4 (3)2 (5), 360
```

```
-1, 1, 1, -1
```

We bepalen voor elk priemgetal p een Sylow p -subgroep met $n=6$ en p een priemdelers van de groeporde $n! = 720$.

```
> sl:=p->if isprime(p) then Sylow(S6,p) else o; fi;
```

```
sl := proc(p) option operator, arrow; if isprime(p) then group:-Sylow(S6, p) else o end if end proc
```

```
> for p from 2 to 5 do print(sl(p),ifactor(grouporder(sl(p)))) od;
```

```
permgroupe(6, {[[1, 2], [3, 6]], [[1, 4], [2, 5]], [[4, 5]], [[3, 6]]}), (2)4
```

```
permgroupe(6, {[[3, 6, 4]], [[1, 5, 2]]}), (3)2
```

```
permgroupe(6, { }), 1
```

```
permgroupe(6, {[[1, 6, 4, 3, 2]]}), (5)
```

Maar **pas op**. Als we de functie "sl(p)" aanroepen wordt **niet** steeds *dezelfde* Sylow p -groep gegenereerd. We maken daarom een keus.

```
> syl(2):=permgroupe(6, {[[3, 4], [5, 6]], [[5, 6]], [[1, 2], [5, 6]], [[1, 6], [2, 5], [3, 4]]}):
```

```
syl(3):=permgroupe(6, {[[3, 4, 6]], [[1, 5, 2]]}):
```

```
syl(5):=permgroupe(6, {[[1, 6, 4, 5, 2]]}):
```

```
> print(center(syl(2)),grouporder(center(syl(2))));
```

```
permgroupe(6, {[[3, 4]], [[1, 2], [5, 6]]}), 4
```

Alle Sylow p -subgroepen van de S_n , notatie $S_n(p)$, kunnen recursief met behulp van kransproducten geconstrueerd worden. Zie paragraaf 5.9 van het aanbevolen boek van Hall. Als n een p -tallige representatie $n = a_r p^r + \dots + a_1 p + a_0$ heeft en $N = a_r p^r + \dots + a_1 p_1$ met, per definitie, $p_k = p^{(k-1)} + \dots + p + 1 = (p^k - 1)/(p - 1)$, dan geldt $|S_n(p)| = p^N$ en dit is een product van a_r keer p^{p_r} tot en met a_2 keer p^{p_2} en a_1 keer p . Partitioneer nu de verzameling $\{1, 2, \dots, n\}$ in a_r blokken van de grootte p^{p_r} tot en met a_1 blokken van de grootte p [en a_0 singletons], construeer op elk blok van de grootte p^k een $S_{p^k}(p)$. Het (directe) product is de gevraagde $S_n(p)$. De recursieve constructie van een $S_{p^k}(p)$, als kransproduct, demonstreren we alleen met voorbeelden. Neem eerst ons

geval $n = 6$ en schrijf $6 = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 0$, $6 = 2 \cdot 3 + 0$ en $6 = 1 \cdot 5 + 1$. Het laatste geval is simpel. Gebruik een Sylow 5-subgroep van een S_5 (na keuze van 5 elementen uit $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, bijvoorbeeld $\{1, 2, 4, 5, 6\}$). Om een Sylow 3-subgroep te maken, neem het (directe) product van twee Sylow 3-groepen van een S_3 , op respectievelijk $\{3, 4, 6\}$ en $\{1, 2, 5\}$. Uit de centrumberekening hierboven zien we dat de Sylow 2-subgroep het (directe) product is van een Sylow 2-subgroep van een S_2 op $\{3, 4\}$ en een Sylow 2-subgroep van een S_4 (van de orde $8 = 2^2 \cdot 2!$) op $\{1, 2, 5, 6\}$. Deze laatste groep D_4 is isomorf met de symmetriegroep van een vierkant [nummer de hoekpunten in de volgorde 1, 5, 2, 6] en is het eerste serieuze geval van een kransproduct, de permutatie $(1,6) \cdot (2,5)$ verwisselt de door $(1,2)$ voortgebrachte 2-cyclische groep op $\{1, 2\}$ met zijn copie op $\{5, 6\}$. [$D_4 = C_2$ wr C_2 , waarin de eerste C_2 als een $S_2(2)$ gezien kan worden en "wr", van het Engelse "wreath", als krans(product) moet worden uitgesproken]. Geheel analoog geldt $S_9(3) = S_3(3)$ wr $C_3 = C_3$ wr C_3 een groep van de orde $3^3 \cdot 3 = 3^4 = 81$ met als vier voortbrengers bijvoorbeeld $(1, 2, 3)$, $(4, 5, 6)$, $(7, 8, 9)$ en $((1, 4, 7) \cdot (2, 5, 8) \cdot (3, 6, 9))$. Tenslotte $S_8(2) = S_4(2)$ wr $C_2 = (C_2$ wr $C_2)$ wr C_2 , een groep van de orde $8^2 \cdot 2 = 2^7 = 128$ met als zeven voortbrengers bijvoorbeeld $\{(1, 2), (3, 4)$ en $((1, 3) \cdot (2, 4))\}$ met $\{(5, 6), (7, 8)$ en $((5, 7) \cdot (6, 8))\}$ en $((1, 5) \cdot (2, 6) \cdot (3, 7) \cdot (4, 8))$. Nu is het kransproduct associatief en we kunnen daarom $S_8(2)$ ook zien als C_2 wr $(C_2$ wr $C_2)$, een groep van de orde $2^4 \cdot 8 = 2^7$ met als natuurlijke set voortbrengers $\{(1, 2), (3, 4), (5, 6), (7, 8)\}$ met $\{(1, 3) \cdot (2, 4)\}$, $\{(5, 7) \cdot (6, 8)\}$, $\{(1, 5) \cdot (2, 6)\} \cdot \{(3, 7) \cdot (4, 8)\}$.

```
> print('syl(2)=elements(syl(2)); print('syl(3)=elements(syl(3));
print('syl(5)=elements(syl(5));
syl(2) = {[ [3, 4] ], [ [1, 6], [2, 5] ], [ [1, 5, 2, 6], [3, 4] ], [ [1, 2], [3, 4], [5, 6] ], [ [1, 6, 2, 5], [3, 4] ], [ ], [ [1, 2] ],
[ [3, 4], [5, 6] ], [ [5, 6] ], [ [1, 2], [5, 6] ], [ [1, 6], [2, 5], [3, 4] ], [ [1, 5], [2, 6], [3, 4] ], [ [1, 6, 2, 5] ], [ [1, 2], [3, 4] ],
[ [1, 5], [2, 6] ], [ [1, 5, 2, 6] ] }
syl(3) = {[ [1, 2, 5], [3, 4, 6] ], [ [1, 2, 5], [3, 6, 4] ], [ ], [ [3, 6, 4] ], [ [1, 5, 2], [3, 4, 6] ], [ [1, 2, 5] ],
[ [1, 5, 2], [3, 6, 4] ], [ [1, 5, 2] ], [ [3, 4, 6] ] }
syl(5) = { [ ], [ [1, 4, 2, 6, 5] ], [ [1, 2, 5, 4, 6] ], [ [1, 6, 4, 5, 2] ], [ [1, 5, 6, 2, 4] ] }
```

Door naamverandering (conjugatie) kunnen we de Sylow 2-subgroep van hierboven zo verplaatsen dat $\{1, 5, 2, 6\}$ in $\{1, 2, 3, 4\}$ overgaat [Sylow p -subgroepen van een groep G zijn *altijd* geconjugieerd in G]. Vervolgens kunnen we de Sylow 2-subgroep van de S_4 daarbinnen selecteren, die u inmiddels bekend zal voorkomen.

```
> inw:=x->mulperms(invperm([ [2, 3, 5], [4, 6] ]), mulperms(x, [ [2, 3, 5], [4, 6] ])) :
map(x->inw(x), elements(syl(2))) ; select(y->not member([5, 6], {op(y)}), %);
{ [ [1, 3], [2, 4] ], [ [1, 2, 3, 4] ], [ [1, 4], [2, 3] ], [ [1, 4, 3, 2], [5, 6] ], [ [1, 2], [3, 4], [5, 6] ], [ ], [ [2, 4] ],
[ [1, 4], [2, 3], [5, 6] ], [ [1, 2, 3, 4], [5, 6] ], [ [5, 6] ], [ [1, 3] ], [ [1, 4, 3, 2] ], [ [2, 4], [5, 6] ], [ [1, 3], [2, 4], [5, 6] ],
[ [1, 3], [5, 6] ], [ [1, 2], [3, 4] ] }
{ [ [1, 3], [2, 4] ], [ [1, 2, 3, 4] ], [ [1, 4], [2, 3] ], [ ], [ [2, 4] ], [ [1, 3] ], [ [1, 4, 3, 2] ], [ [1, 2], [3, 4] ] }
```

De in Maple 9 aanwezige bibliotheek van transitieve permutatiegroepen

```
> transgroup(6, 'number', 'order');
16, [6, 6, 12, 12, 18, 24, 24, 24, 36, 36, 48, 60, 72, 120, 360, 720]
```

Op conjugatie na zijn *alle* transitieve subgroepen van de S_6 opvraagbaar. Het zijn er zestien. Twee van de orde 6 tot en met een van de orde 720, de S_6 zelf. Bij elke van de zestien vragen we vervolgens naar hun naam (of namen), of de groep in de A_6 bevat is of niet, een (practisch) stel voortbrengers, en een lijst van aantallen van elementen in de groep met een gegeven cykelstructuur.

```
> for i from 1 to 16 do
transgroup([6, i], 'order', 'names', 'parity', 'generators', 'SnConjugates') od;
6, { "3[x]2", "C(6)", -1, { [ [1, 2, 3, 4, 5, 6] ], [1, 0, 0, 1, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 2] }
6, { "[3]2", "D_6(6)", -1, { [ [2, 4, 6], [1, 3, 5] ], [ [5, 6], [1, 4], [2, 3] ] }, [1, 0, 0, 3, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 0]
12, { "S(3)[x]2", "D(6)", -1, { [ [1, 2, 3, 4, 5, 6] ], [ [5, 6], [1, 4], [2, 3] ] }, [1, 0, 3, 4, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 2]
12, { "[2^2]3", "A_4(6)", 1, { [ [1, 4], [2, 5] ], [ [2, 4, 6], [1, 3, 5] ] }, [1, 0, 3, 0, 0, 0, 8, 0, 0, 0, 0]
18, { "3 wr 2", "[3^2]2", "F_18(6)", -1, { [ [2, 4, 6] ], [ [3, 6], [1, 4], [2, 5] ] }, [1, 0, 0, 3, 4, 0, 4, 0, 0, 0, 6]
24, { "2 wr 3", "2A_4(6)", "[2^3]3", -1, { [ [2, 4, 6], [1, 3, 5] ], [ [3, 6] ] }, [1, 3, 3, 1, 0, 0, 8, 0, 0, 0, 8]
24, { "[2^2]S(3)", "S_4(6d)", 1, { [ [1, 4], [2, 5] ], [ [2, 4, 6], [1, 3, 5] ], [ [1, 5], [2, 4] ] }, [1, 0, 9, 0, 0, 0, 8, 0, 6, 0, 0]
24, { "S_4(6c)", "1/2[2^3]S(3)", -1, { [ [1, 5], [2, 4], [3, 6] ], [ [1, 4], [2, 5] ], [ [2, 4, 6], [1, 3, 5] ] },
[1, 0, 3, 6, 0, 0, 8, 6, 0, 0, 0]
36, { "F_18(6):2", "[1/2S(3)^2]2", -1, { [ [2, 4, 6] ], [ [3, 6], [1, 4], [2, 5] ], [ [1, 5], [2, 4] ] },
[1, 0, 9, 6, 4, 0, 4, 0, 0, 0, 12]
36, { "F_36(6)", "1/2[S(3)^2]2", 1, { [ [2, 4, 6] ], [ [1, 5], [2, 4] ], [ [3, 6], [1, 4, 5, 2] ] }, [1, 0, 9, 0, 4, 0, 4, 0, 18, 0, 0]
```

```

48, {"2S_4(6)", "[2^3]S(3)", "2 wr S(3)"}, -1, {[[2, 4, 6], [1, 3, 5]], [[3, 6]], [[1, 5], [2, 4]]},
    [1, 3, 9, 7, 0, 0, 8, 6, 6, 0, 8]
    60, {"A_5(6)", "L(6)", "PSL(2,5)"}, 1, {[[1, 2, 3, 4, 6]], [[5, 6], [1, 4]]}, [1, 0, 15, 0, 0, 0, 20, 0, 0, 24, 0]
72, {"F_36(6):2", "[S(3)^2]2", "S(3) wr 2"}, -1, {[[2, 4]], [[2, 4, 6]], [[3, 6], [1, 4], [2, 5]]},
    [1, 6, 9, 6, 4, 12, 4, 0, 18, 0, 12]
    120, {"L(6):2", "S_5(6)", "PGL(2,5)"}, -1, {[[1, 2], [3, 4], [5, 6]], [[1, 2, 3, 4, 6]]}, [1, 0, 15, 10, 0, 0, 20, 30, 0, 24, 20]
    360, {"A(6)"}, 1, {[[4, 5, 6]], [[1, 2, 6]], [[3, 4, 6]], [[2, 3, 6]]}, [1, 0, 45, 0, 40, 0, 40, 0, 90, 144, 0]
    720, {"S(6)"}, -1, {[[5, 6]], [[1, 6]], [[4, 6]], [[3, 6]], [[2, 6]]}, [1, 15, 45, 15, 40, 120, 40, 90, 90, 144, 120]

```

Steeds als er "wr" (van "wreath product") in de namenlijst voorkomt hebben we met een *niettriviaal* kransproduct te maken. Merk op dat de Sylow subgroepen geen van alle transitief zijn. De volgorde in de Maplelijst van de partities die de conjugatieklassen van de S_6 bepalen staat hieronder. Hij blijkt lexicografisch, mits we van rechts naar links lezen. De bijbehorende klasse-aantallen staan weer daaronder. Zo lezen we af dat er 15 transposities (2-cykels) en 15 drielingen (producten van drie disjuncte 2-cykels) zijn [en 45 tweelingen]. Dit is direct na te gaan met eenvoudige combinatoriek. Bijvoorbeeld $\text{bin}(6,2)=15$ en evenzo $\text{bin}(6,2)*\text{bin}(4,2)*\text{bin}(2,2)/3! = 15$.

```

> partition(6);transgroup([6,16], 'SnConjugates');
    [[1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 2], [1, 1, 2, 2], [2, 2, 2], [1, 1, 1, 3], [1, 2, 3], [3, 3], [1, 1, 4], [2, 4], [1, 5], [6]]
    [1, 15, 45, 15, 40, 120, 40, 90, 90, 144, 120]

```

[-] Conjugatieklassen van de S_6 en de bijbehorende centralisatoren

We maken de partitielijst nu stap voor stap en geven een corresponderende lijst L met representanten van de bijbehorende conjugatieklassen van de S_6 .

```

> [seq(decodepart(6,i),i=1..11)]; encodepart([2,2,2]);
L:=[[[]],[[5,6]],[[3,4],[5,6]],[[1,2],[3,4],[5,6]],[[4,5,6]],[[2,3],[4,5,6]],[[1,2,3],[4,5,6]],[[3,4,5,6]],[[1,2],[3,4,5,6]],[[2,3,4,5,6]],[[1,2,3,4,5,6]]];
    [[1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 2], [1, 1, 2, 2], [2, 2, 2], [1, 1, 1, 3], [1, 2, 3], [3, 3], [1, 1, 4], [2, 4], [1, 5], [6]]
    4
L:=[[[]],[[5,6]],[[3,4],[5,6]],[[1,2],[3,4],[5,6]],[[4,5,6]],[[2,3],[4,5,6]],[[1,2,3],[4,5,6]],[[3,4,5,6]],[[1,2],[3,4,5,6]],[[2,3,4,5,6]],[[1,2,3,4,5,6]]]
> map(t->SnConjugates(S6,t),L); map(t->720/t,%);
    [1, 15, 45, 15, 40, 120, 40, 90, 90, 144, 120]
    [720, 48, 16, 48, 18, 6, 18, 8, 8, 5, 6]

```

Dit zijn de aantallen permutaties met een gegeven cykelstructuur en daaronder de ordes van de bijbehorende centralisatoren. Als g een product van k disjuncte cykels van de lengte m is [in de S_{mk}], dan is zijn centralisator een kransproduct C_m wr S_k met orde $m^k k!$. [Los de vergelijking $f^{(-1)} g f = g$ op in S_{mk} met gebruikmaking van het naamveranderingsprincipe en door op te merken dat de m -cykels in het rechterlid op $k!$ manieren te ordenen zijn]. In het algemene geval van cykels van *verschillende* lengte krijg je een direct product van dergelijke groepen. Het laatste lijstje is nu eenvoudig met de hand te controleren. Voor een later gebruik laten we Maple vier centralisatoren genereren.

```

> centralizer(S6,[1,2]); centralizer(S6,[1,2],[3,4],[5,6]);
inter(centralizer(S6,[1,2]),centralizer(S6,[1,2],[3,4],[5,6]));
print(groupporder(%),groupporder(%));
    permgrou(6, {[[1, 2]], [[3, 4, 5, 6]], [[4, 5, 6]])}
    permgrou(6, {[[1, 3, 5, 2, 4, 6]], [[3, 5], [4, 6]], [[1, 2]])}
    permgrou(6, {[[3, 4]], [[3, 5], [4, 6]], [[1, 2]])}
    48, 16

```

Het tweede geval is een kransproduct van een C_2 met een S_3 . Typische elementen erin zijn (1,2), (3,4) en (5,6), de disjuncte voortbrengers van 3 copieën van een C_2 en bijvoorbeeld [[1, 3, 5, 2, 4, 6]] die, bij conjugatie, de copieën in een 3-cykel permuteert.

```

> centralizer(S6,[1,2,3]); centralizer(S6,[1,2,3],[4,5,6]);
inter(centralizer(S6,[1,2,3]),centralizer(S6,[1,2,3],[4,5,6]));
print(groupporder(%),groupporder(%));
    permgrou(6, {[[5, 6]], [[4, 5, 6]], [[1, 3, 2]])}
    permgrou(6, {[[4, 5, 6]], [[1, 3, 2]], [[1, 4], [2, 5], [3, 6]])}
    permgrou(6, {[[4, 5, 6]], [[1, 3, 2]])}
    18, 9

```