Thuisopgave 1
ALGEBRA (152063) '98 – '99

A. Zij G een groep, H een subgroep van G.
Vorm $N_G(H) := \{a \in G \mid a \cdot H = H \cdot a\}$. Voor $a \in N_G(H)$, $x \in H$, stel: $\tau_a(x) = a \cdot x \cdot a^{-1}$.

a) Bewijs: $N_G(H)$ is een subgroep van G met $H \subseteq N_G(H)$.

b) Bewijs: τ is een werking van $N_G(H)$ in H.

c) Bewijs: $\forall_{a \in N_G(H)}\ \tau_a$ is een isomorfisme van H op H.

Stel nu $G = S_5$, $H = \langle h \rangle$ met $h = (3, 4, 5) \in S_5$.

d) Bereken expliciet $N_G(H)$ en $C_G(h)$. Gebruik van "Lagrange" en de baanstellingen en hun gevolgen kan handig zijn.

B. $G = U_{20} = \{[x]_{20} \mid GGD(x, 20) = 1\}$, géén cyclische groep.

a) Bepaal de groepstabel van G.

b) Geef bij ieder element x van G zijn inverse x^{-1} en orde $o(x)$.

Kies nu een element a van G met orde 4 en een element b van G met orde 2 en $b \notin \langle a \rangle$.

c) Rangschik de elementen van G in een 2×4 rechthoek zó, dat elke kolom één coset is van $\langle b \rangle$ en elke rij één coset van $\langle a \rangle$; geef m.b.v. hiervan expliciet een isomorfisme van G op $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4, +)$.

d) Geef het "lattice" van alle subgroepen van G (expliciet).

e) Bepaal alle isomorfismen van G op zichzelf (expliciet).

f) Bepaal expliciet Kern en Beeldgroep van het morfisme $t \overset{\gamma_2}{\mapsto} t^2$.

C. Maak opgave 14 §14.7 van het boek met "seven" vervangen door "twelve" m.b.v. thm. 14.4. Cosets van subgroep(en) van $(\mathbb{Z}_{15}, +)$ kunnen bij de analyse nuttig zijn.

Normering:

A		B		C
a:	$1\frac{1}{2}$	a:	$\frac{1}{2}$	3
b:	1	b:	$\frac{1}{2}$	
c:	1	c:	1	
d:	3	d:	1	
		e:	1*	
		f:	1	

*: Bonus-onderdeel.

Thuisopgave 2
ALGEBRA (152063) '98 – '99

A. Zij M_F de ring van de 2×2 matrices over een lichaam F.
Vorm $S_F = \{\alpha I + \beta W \mid \alpha, \beta \in F\}$ met

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad W = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Bewijs dat S_F een commutatieve deelring van M_F is.
b) Bewijs dat S_F een lichaam is, als $F = \mathbb{Q}$ of $F = \mathbb{Z}_5$.
c) Bepaal nuldelers in S_F, als $F = \mathbb{R}$ en als $F = \mathbb{Z}_{11}$.
d) Bewijs dat

$$\alpha I + \beta W \overset{f}{\mapsto} \alpha + \beta\sqrt{3}$$

een ringmorfisme definieert van $S_{\mathbb{Q}}$ in $\mathbb{R}$.
e) Bewijs dat $\mu(A) = \widetilde{A}$ (de geadjungeerde van A), als $F = \mathbb{Z}_5$ en $A = \alpha I + \beta W \in S_{\mathbb{Z}_5}$ (zie dictaat voor de definitie van μ).

B. Zij $\mathbb{F}_{25}$ het lichaam met 25 elementen met basis $\{1, \delta\}$ over $\mathbb{Z}_5$, waarin δ voldoet aan de definiërende vergelijking $\delta^2 = 4\delta + 3$.

a) Bewijs: $X^2 + X + 2$ is de minimumveelterm van δ over $\mathbb{Z}_5$.
b) Maak de volgende tabel af t/m δ^{24} en bewijs δ is primitief.

macht van δ	representatie t.a.v. $\{1, \delta\}$	
1	1	0
δ	0	1
δ^2	3	4
δ^3	2	4

c) Geef alle ondergroepen van $\mathbb{F}_{25}^*$ "in latticevorm" en identificeer daarin in het bijzonder $\mathbb{Z}_5^*$.
d) Ontbind $X^2 + X + 2$ over $\mathbb{F}_{25}$ m.b.v. μ en controleer uw resultaat m.b.v. de voltooide tabel.
e) Bepaal "met lineaire algebra", uit de tabel, de minimumveelterm van $\omega = \delta^9$ over $\mathbb{Z}^5$.
f) Geef de twee ringisomorfismen van $S_{\mathbb{Z}_5}$ op $\mathbb{F}_{25}$.
g) Ontbind $X^{25} - X$ in irreducibele factoren: (1) over $\mathbb{F}_{25}$ en (2) over $\mathbb{Z}_5$.

Normering:

A		B	
a:	2	a:	1
b:	1	b:	3
c:	1	c:	2
d:	2	d:	2
e:	1	e:	1
		f:	1
		g:	1+ 1*

*: Bonus-onderdeel.