

Gehele 2-adische approximaties van $\log(-5)/\log(3)$ $= -1 + \log(-15)/\log(3)$ met log de 2-adische logaritme

We gebruiken uitsluitend de 2-adische norm $\|\cdot\|$ op het lichaam van de rationale getallen \mathbf{Q} (en de bijbehorende metriek: $d(x,y) = \|x - y\|$). We herinneren er aan dat voor een breuk a/b ongelijk nul $\|a/b\|$ per definitie de hoogste macht van 2 is die in de noemer b opgaat gedeeld door de hoogste macht van 2 die in de teller a opgaat (en $\|0\| = 0$). Nu geldt: $\|x*y\| = \|x\|* \|y\|$ en $\|x + y\|$ is kleiner dan (of gelijk aan) $\max\{\|x\|, \|y\|\}$, een sterke driehoeksongelijkheid, waarin gelijkheid optreedt zodra $\|x\|$ en $\|y\|$ verschillend zijn. Meetkundig gesproken zijn alle driehoeken minstens gelijkbenig. We zoeken waarden n , zodat $\|3^n + 5\|$ klein is, ofwel [na vermenigvuldigen met 3] zo, dat $3^{(n+1)}$ ongeveer gelijk is aan -15. Na het nemen van de 2-adische (natuurlijke) logaritme, notatie \log , komt dit overeen met $(n + 1) \log(3)$ is ongeveer -15, ofwel met n is ongeveer $-1 + \log(-15)/\log(3)$.

Voor snellere convergentie zetten we deze laatste uitdrukking om in $-1 + \frac{2 \log(1 - 2^4)}{\log(1 + 2^3)}$. De Maple uitvoer is beperkt gehouden, onder andere, door de 'inerte' dubbele punt in plaats van de 'actieve' puntkomma te gebruiken.

```
> restart:
```

```
> T:=taylor(-1+x*log(1-x^4)/log(1+x^3),x=0,200):
```

De volgende stap zorgt ervoor dat het O -symbool van Landau verwijderd wordt.

```
> P:=convert(T,polynom):
```

Nu gaan we de x door 2 vervangen.

```
> S:=subs(x=2,P);
```

```
S := -10806767510222519083390524772398926003581282302611800590442863961492952\
```

```
66995009351283253329687238797105515791394310175201367530796019 /
```

```
2508264853499326642940872926516048521171717726953911635625320469818115234375
```

We bepalen nu de geheeltallige benaderingen tot op een 2-adische afstand van $\epsilon = 2^{(-64)}$

```
> for i from 1 to 64 do A[i]:=S mod 2^i od:
```

We printen de approximaties van S in rijtjes van 8:

```
> for j from 0 to 7 do
```

```
  print(A[8*j+1],A[8*j+2],A[8*j+3],A[8*j+4],A[8*j+5],A[8*j+6],A[8*
  j+7],A[8*j+8])od;
```

1, 3, 3, 11, 11, 11, 11, 11

267, 267, 1291, 3339, 7435, 15627, 15627, 15627

15627, 15627, 15627, 539915, 539915, 539915, 4734219, 13122827

29900043, 29900043, 97008907, 97008907, 365444363, 365444363, 1439186187,

3586669835

7881637131, 16471571723, 33651440907, 68011179275, 68011179275, 205450132747,

480328039691, 480328039691

480328039691, 480328039691, 480328039691, 9276421061899, 9276421061899,

44460793150731, 114829537328395, 255567025683723

255567025683723, 818516979105035, 818516979105035, 3070316792790283,

7573916420160779, 16581115674901771, 34595514184383755, 34595514184383755
 106653108222311691, 250768296298167563, 250768296298167563, 250768296298167563,
 250768296298167563, 2556611305511861515, 2556611305511861515,
 2556611305511861515

```
> for i from 0 to 2 do print(seq(B[7*i+j]={3^A[7*i+j]+5 mod
  2^(7*i+j+2),3^A[7*i+j]+5 mod 2^(7*i+j+3)},j=1..7)) od;
```

$B_1 = \{0, 8\}, B_2 = \{0\}, B_3 = \{0, 32\}, B_4 = \{0\}, B_5 = \{0\}, B_6 = \{0\}, B_7 = \{0\}$

$B_8 = \{0, 1024\}, B_9 = \{0\}, B_{10} = \{0, 4096\}, B_{11} = \{0, 8192\}, B_{12} = \{0, 16384\},$

$B_{13} = \{0, 32768\}, B_{14} = \{0\}$

$B_{15} = \{0\}, B_{16} = \{0\}, B_{17} = \{0\}, B_{18} = \{0\}, B_{19} = \{0, 2097152\}, B_{20} = \{0\}, B_{21} = \{0\}$

Daar waar $B[i]$ meer is dan $\{0\}$, geldt dat $A[i]$ ongelijk is aan $A[i+1]$ ("the second case" in het bewijs en daarmee in de constructie van de rij a). We herhalen een en ander, maar nu met wat minder termen voor de tweede taylor-reeks uit de toelichting (met daarin, na substitutie van $x = 2$, onder andere de $\log(-3)$).

Gehele 2-adische approximaties van $-1+\log(-15)/\log(-3)$

```
> restart;
```

```
> t:=taylor(-1+log(1-x^4)/log((1+x)/(1-x)),x=0,17);
```

$$t := -1 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{6}x^5 - \frac{37}{180}x^7 + \frac{403}{3780}x^9 - \frac{3667}{28350}x^{11} + \frac{73061}{935550}x^{13} - \frac{481402483}{5108103000}x^{15} + O(x^{17})$$

```
> p:=convert(t,polynomial);
```

$$p := -1 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{6}x^5 - \frac{37}{180}x^7 + \frac{403}{3780}x^9 - \frac{3667}{28350}x^{11} + \frac{73061}{935550}x^{13} - \frac{481402483}{5108103000}x^{15}$$

```
> s:=subs(x=2,p);
```

$$s := \frac{-1714215058663}{638512875}$$

```
> for i from 0 to 2 do print(seq(a[6*i+j]= s mod
  2^(6*i+j),j=1..6)) od;
```

$a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 3, a_4 = 11, a_5 = 11, a_6 = 11$

$a_7 = 11, a_8 = 11, a_9 = 267, a_{10} = 267, a_{11} = 1291, a_{12} = 3339$

$a_{13} = 7435, a_{14} = 15627, a_{15} = 32011, a_{16} = 32011, a_{17} = 97547, a_{18} = 228619$

Vanaf $n = 15$ is a_n ongelijk de beste approximatie mod 2^n (dit is A_n). Dit komt doordat door factoren 2 in de noemers van de coëfficiënten de orde van een term in 2-adische zin lager kan zijn dan de graad in x . Als we de orde 17 in "taylor" ophogen tot 20 is het weer in orde tot en met a_{18} .